

## MATHEMATIQUES

Durée : 1 heure  
Coefficient : 1

**IMPORTANT** : Le sujet du concours comporte quatre exercices. Chaque exercice est noté sur 10 points ; vous devez choisir 2 exercices et 2 seulement et les rédiger en indiquant le numéro de l'exercice. Le total des points des deux exercices donnera votre note sur 20 pour cette épreuve.  
La calculatrice est autorisée.

## Exercice 1

Un artisan s'est lancé depuis quelques années dans la fabrication et la vente directe d'un objet, qu'il vend sur les marchés.

Concernant le prix de vente de cet objet, il a fait depuis quelque temps un certain nombre d'essais, qui lui ont permis de faire les constatations suivantes :

- quand chaque objet est vendu au prix de 10 €, il réalise chaque semaine une recette de 2 000 € ;
- quand chaque objet est vendu au prix de 30 €, il réalise chaque semaine une recette de 1 200 € ;
- quand chaque objet est vendu au prix de 25 €, il vend chaque semaine 80 objets.

- a. Déterminer le nombre d'objets vendus par l'artisan lorsque le prix de l'objet est fixé à 10 €.
  - b. Déterminer le nombre d'objets vendus par l'artisan lorsque le prix de l'objet est fixé à 30 €.
- Désignant par  $x$  le prix de vente de l'objet ( $x$  compris entre 10 € et 30 €), on admet que le nombre  $n(x)$  d'objets vendus chaque semaine peut s'exprimer en fonction de  $x$  sous la forme  $n(x) = ax + b$ , où  $a$  et  $b$  sont deux constantes.

  - a. En utilisant les résultats des questions **1.a.** et **1.b.**, déterminer la valeur de chacune des constantes  $a$  et  $b$ .
  - b. Vérifier que, grâce à la formule trouvée, on obtient bien :  $n(25) = 80$ .
- En désignant toujours par  $x$  le prix de vente d'un objet, on considère  $r(x)$  le montant total de la recette réalisée en vendant l'objet à ce prix durant une semaine.

  - a. Donner l'expression de  $r(x)$  en fonction de  $x$
  - b. Déterminer les valeurs de  $x$  pour lesquelles on a  $r(x) = 2000$ .
- a. Déterminer l'expression de  $r'(x)$  en fonction de  $x$ .
  - b. En déduire le sens de variation de  $r$ , puis établir son tableau de variations sur l'intervalle  $[10; 30]$ .
  - c. Utiliser ce qui précède pour déterminer le prix de vente qui permet de réaliser, chaque semaine, la recette maximale. Indiquer, dans ce cas, le nombre d'objets vendus ainsi que la recette réalisée.

## Exercice 2

Chez un garagiste, deux taux de TVA peuvent être appliqués, selon que les pièces fournies sont des pièces neuves ou des pièces d'occasion.

1. Dans le tableau ci-dessous, on présente pour trois pièces neuves, notées  $N_1$ ,  $N_2$  et  $N_3$ , leur prix HT (hors taxe), leur prix TTC (toutes taxes comprises), et le montant de la TVA ; tous ces prix sont en euros.

	pièce $N_1$	pièce $N_2$	pièce $N_3$
prix HT	35,00 €		
prix TTC	41,86 €		77,74 €
dont TVA	6,86 €	20,58 €	

- a. Grâce aux indications concernant l'article  $N_1$ , calculer le taux de TVA en vigueur sur les pièces neuves.
  - b. Reproduire alors le tableau, et compléter les colonnes concernant les articles  $N_2$  et  $N_3$ .
2. Dans le tableau ci-dessous, on présente pour trois pièces d'occasion, notées  $O_1$ ,  $O_2$  et  $O_3$ , leur prix HT (hors taxe), leur prix TTC (toutes taxes comprises), et le montant de la TVA ; tous ces prix sont en euros.

	pièce $O_1$	pièce $O_2$	pièce $O_3$
prix HT	15,00 €		
prix TTC	16,47 €		60,39 €
dont TVA	1,47 €	9,31 €	

- a. Grâce aux indications concernant l'article  $O_1$ , calculer le taux de TVA en vigueur sur les pièces d'occasion.
  - b. Reproduire alors le tableau, et compléter les colonnes concernant les articles  $O_2$  et  $O_3$ .
3. Rencontrant son comptable, notre garagiste engage avec lui la discussion suivante :  
« Puisque le taux de TVA en vigueur sur les pièces neuves est de 19,6 % et que le taux de TVA en vigueur sur les pièces d'occasion est de 9,8 %, dans le cas où je fournis à un client à la fois des pièces neuves et des pièces d'occasion, ne pourrais-je pas appliquer pour l'ensemble de toutes les pièces fournies une TVA au taux de 14,7 %, puisque 14,7 est la moyenne des deux nombres 19,6 et 9,8 ? »  
Dire, en donnant suffisamment d'explications, quelle doit être la réponse du comptable.
  4. Le garagiste a fourni à un client une pièce neuve coûtant 30 € hors taxe, et une pièce d'occasion coûtant 75 € hors taxe.
    - a. Déterminer le montant total TTC de la facture que ce client devra acquitter.
    - b. Déterminer ce que représente, en pourcentage, les taxes qu'aura payées le client par rapport au montant global HT de la facture.
  5. Un autre client règle une facture pour deux pièces, l'une neuve, et l'autre d'occasion. Le montant total HT de la facture est de 105 €, et les taxes payées par le client représentent 18,2 % de ce montant HT.  
Déterminer le prix HT de la pièce neuve, et le prix HT de la pièce d'occasion .

### Exercice 3

Deux sociétés  $X$  et  $Y$  commercialisent un produit sensiblement comparable.

La société  $X$  vendait son produit 120 € le 1<sup>er</sup> janvier 2000, et elle le vendait 132 € le 1<sup>er</sup> janvier 2002.

La société  $Y$  vendait son produit 100 € le 1<sup>er</sup> janvier 2000, et elle le vendait 108,16 € le 1<sup>er</sup> janvier 2002.

Soit  $n$  le rang de l'année 2000 +  $n$  ; on désigne respectivement par  $x_n$  et par  $y_n$  les prix au 1<sup>er</sup> janvier de l'année 2000 +  $n$  des produits commercialisés respectivement par les sociétés  $X$  et  $Y$ . Ainsi, on a :  $x_0 = 120$ ,  $x_2 = 132$ ,  $y_0 = 100$  et  $y_2 = 108,16$ .

1. On indique que la société  $X$  augmente son prix de façon linéaire, c'est-à-dire qu'il existe deux constantes  $a$  et  $b$  telles que, pour tout entier naturel  $n$ , le prix pratiqué par la société  $X$  s'exprime sous la forme :  $x_n = an + b$ .
  - a. Déterminer  $a$  et  $b$ .
  - b. Déterminer le prix atteint au 1<sup>er</sup> janvier 2010 par le produit de la société  $X$ .
  - c. Déterminer de combien, en pourcentage, le produit de la société  $X$  a augmenté entre le 1<sup>er</sup> janvier 2000 et le 1<sup>er</sup> janvier 2010.
  
2. On indique que la société  $Y$  applique au prix de son produit un taux d'augmentation fixe chaque année.

On désigne par  $k$  le coefficient multiplicateur qui fait passer du prix pratiqué une année donnée au prix pratiqué l'année suivante.

  - a. Justifier que l'on a :  $k^2 = 1,0816$ , puis déterminer  $k$ .
  - b. De combien, en pourcentage, la société  $Y$  augmente-t-elle chaque année le prix de son produit ?
  - c. Déterminer le prix atteint par le produit de la société  $Y$  au 1<sup>er</sup> janvier 2010.
  - d. Déterminer de combien, en pourcentage, le produit de la société  $Y$  a augmenté entre le 1<sup>er</sup> janvier 2000 et le 1<sup>er</sup> janvier 2010.
  
3. On se propose, dans cette question, de comparer l'évolution des prix des produits des deux sociétés  $X$  et  $Y$ .
  - a. Au 1<sup>er</sup> janvier 2025, laquelle des deux sociétés  $X$  ou  $Y$  mettra-t-elle en vente le produit le moins cher ? Qu'en sera-t-il au 1<sup>er</sup> janvier 2030 ?
  - b. En expliquant la démarche, déterminer l'année à partir de laquelle la société  $X$  vendra pour la première fois son produit moins cher que la société  $Y$ .

## Exercice 4

Deux caissières d'une grande surface viennent de finir leur travail ; avant de quitter le magasin, elles rapportent leur caisse au bureau de la comptable.

La caisse de chacune contient des pièces et des billets ; le tableau suivant donne la répartition de chaque type de billet et de pièce dans la caisse de chacune des caissières :

Montant en euros		Billets					Pièces						
		100	50	20	10	5	1	0,50	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01
Nombre de billets ou de pièces	caisse d'Anna	2	15	26	72	135	$x$	$y$	96	84	42	53	24
	caisse de Britta	5	11	30	69	$z$	117	107	$r$	$r$	$s$	34	$t$

Dans les questions suivantes, des indications vont être données qui permettront de déterminer les six inconnues  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $r$ ,  $s$  et  $t$ .

1.
  - a. Déterminer la somme qu'Anna possède dans sa caisse en billets.
  - b. En déduire la somme qu'elle possède dans sa caisse en pièces, sachant que celle-ci est 15 fois plus petite que la somme qu'elle possède en billets.
  - c. Sachant que la caisse d'Anna contient en tout 493 pièces, déterminer le nombre  $x$  de pièces de 1 € et le nombre  $y$  de pièces de 0,50 €.
  
2.
  - a. On indique qu'en comparant les sommes en billets contenues dans les caisses d'Anna et de Britta, on trouve 100 € de moins dans la caisse de Britta que dans celle d'Anna. Déterminer le nombre  $z$  de billets de 5 € qu'a Britta dans sa caisse.
  - b. Dans la caisse de Britta, les nombres de pièces de 0,10 € et de 0,05 € sont deux nombres  $r$  et  $s$  proportionnels à 84 et 42 ; d'autre part, les nombres de pièces de 0,20 € et de 0,01 € sont deux nombres  $r$  et  $t$  proportionnels à 96 et 24.  
Déterminer ces trois nombres  $r$ ,  $s$  et  $t$  sachant que la caisse de Britta contient 200 € en pièces.
  
3. On prend un billet au hasard ;
  - a. Si ce billet est pris dans la caisse d'Anna, quelle est la probabilité que ce soit un billet de 10 € ?
  - b. Si ce billet est pris dans l'ensemble de tous les billets que contiennent les deux caisses d'Anna et de Britta, quelle est la probabilité que ce soit un billet de 10 € ?
  - c. Si ce billet est pris dans l'ensemble de tous les billets que contiennent les deux caisses d'Anna et de Britta, quelle est la probabilité que ce soit un billet de 10 € provenant de la caisse d'Anna ?
  
4. On réalise l'épreuve suivante :
  - d'abord, on lance une pièce, et l'on observe si elle tombe côté *pile* ou côté *face* ;
  - ensuite, si la pièce est tombée sur *pile*, on prend au hasard un billet dans la caisse d'Anna, si elle est tombée sur *face*, on prend au hasard un billet dans la caisse de Britta.
 Quelle est la probabilité de tirer un billet de 10 € ?